
– OFFRE DE THÈSE 2024-2027 –

ANALYSE DE DONNÉES FONCTIONNELLES POUR CARACTÉRISER
L'ÉVOLUTION DES TEMPÉRATURES AUTOUR DU POINT DE GEL EN
FRANCE ET AU CANADA

- **Lieu:** Laboratoire Jean Kuntzmann, Université Grenoble Alpes, (séjour de recherche à l'UQAM, Canada).
 - **Début et durée:** thèse financée de 3 ans par l'Institut des Mathématiques pour la planète Terre, contrat doctoral de 3 ans débutant au 01/09/2024 ou 01/10/2024; rémunération standard du CNRS.
 - **Profil recherché:** Fortes compétences en statistique, probabilités, implémentation logicielle; apétence pour le travail dans un cadre pluridisciplinaire
 - **Encadrants:** Jean-François Coeurjolly 🌐 (Statistique; Laboratoire Jean Kuntzmann; Université Grenoble Alpes, France), Marie-Hélène Descary 🌐 (Statistique; Département de Mathématiques, UQAM, Canada) et Julie Mireille Thériault 🌐 (Sciences du climat; Département des Sciences de la Terres et de l'atmosphère, UQAM, Canada)
-

Abstract

Le réchauffement climatique est un phénomène indéniable qui se manifeste principalement par une hausse des températures moyennes sur le globe. Ce projet a pour objectif d'approfondir la compréhension de la dynamique temporelle, non pas de moyennes ou de quantiles extrêmes mais de l'ensemble des distributions de températures (densité, fonction de répartition, fonction quantile). La caractérisation de l'évolution des températures en tant que distribution permettra entre autres de comprendre l'impact du changement climatique sur l'évolution des températures autour du point de gel, les temps passés autour de ce point et les vitesses auxquelles ce point est atteint.

Mots-clés : sciences du climat; anomalies de température; statistique; analyse de données fonctionnelles; statistique spatiale et spatio-temporelle; modèles et estimation de déformations.

1 Problématique

Le changement climatique causera inexorablement des événements météorologiques et climatiques extrêmes dans un futur proche [cf le 6ème rapport du GIEC, [Lee et al., 2023](#)]. L'augmentation des températures dans les régions froides, telles que les pays nordiques et les régions montagneuses, mènera à une augmentation des périodes de redoux durant lesquelles les températures de l'air sont autour de 0°C durant l'hiver [[Stewart et al., 2023](#)]. Ces périodes

de redoux peuvent avoir des conséquences majeures sur la fonte du couvert neigeux [e.g. [Scaff et al., 2023](#)] et la disponibilité en eau au printemps [e.g. [DeBeer et al., 2021](#), [Stewart et al., 2019](#)].

Les périodes de redoux [e.g. [Casson et al., 2019](#)] peuvent mener à des conditions de gel-dégel dans les régions froides. Environ 55% de la planète est sujet à ces événements [e.g. [Makoto et al., 2014](#)]. Les conséquences sont majeures. Une petite variation de température autour de 0°C peut changer la structure du sol [[Xie et al., 2017](#)], détériorer les routes et infrastructures [[Biswas et al., 2018](#)] et impacter les plantes et la végétation [[Nilsen et al., 2021](#)]. Lors de la fonte de la neige ou encore du gel de l'eau liquide, la température de l'air s'approche de 0°C [[Stewart, 1985](#), [Yukari Takeuchi and Ishikawa, 2002](#)]. Ces conditions peuvent être maintenues en présence de nuages ou encore lors d'un déplacement du système météorologique.

[Mekis et al. \[2020\]](#) a démontré que même si la température moyenne dans la plupart des stations météorologiques au Canada est supérieure à 0°C , plusieurs mesures indiquent un mode de la distribution de températures horaires entre -2°C et 2°C . [Stewart et al. \[2023\]](#) a également montré que les températures les plus observées dans plus de 95% du sud du Canada sont autour de 0°C . Même avec une augmentation des températures maximales dans un contexte de changement climatique, les conditions proches de 0°C persistent dans plusieurs régions. Il est ainsi essentiel de mieux comprendre et de caractériser les températures spatio-temporellement notamment autour du point de gel. L'objectif général de cette étude est de comprendre l'évolution sur une longue période (disons 1850 à nos jours) de la distribution des températures, notamment autour de 0°C , en lien avec le changement climatique. Parmi les questions d'intérêt, nous chercherons à caractériser spatialement l'évolution annuelle: (i) des températures proches de 0°C ; (ii) des temps passés dans des températures proches du point de gel; (iii) des vitesses auxquelles nous rentrons dans des intervalles de températures autour de 0°C .

Le projet se concentrera sur les territoires du Canada et de la France, d'une part car les questions de températures autour de 0°C sont prédominantes dans ces territoires et d'autre part car nous pourrions bénéficier des données d'Environnement Canada et de Météo-France qui sont devenues de plus en plus accessibles et ont une résolution spatio-temporelle particulièrement fine.

2 Verrous mathématiques et statistique

Dans les études sur le changement climatique basées sur des données de température, le principe standard consiste à analyser les températures annuelles sur une longue période de temps (1850 à nos jours). Pour ce faire, des données sont collectées, souvent à un niveau horaire, afin d'extraire (via un lissage ou une autre technique d'estimation) des informations telles que les températures moyennes, médianes, minimales, maximales et les quantiles extrêmes pour chaque année. Ces résumés annuels sont ensuite comparés à des valeurs de référence calculées à partir des températures observées sur une période de référence, généralement de 30 ans ; la période allant de 1961 à 1990 est fréquemment utilisée à cet effet. Ces comparaisons permettent de constituer une série appelée série d'anomalies de température [[Jones et al., 1986](#), [Li et al., 2024b](#)].

Tel que mentionné à la Section 1, l'objectif de ce projet de recherche est de caractériser et de comprendre la dynamique de la distribution des données (températures, températures autour de 0°C ou temps passés autour de 0°C) sur une année et sur une longue période de temps. De plus, à la différence des analyses standards, nous souhaitons caractériser la distribution complète des données plutôt qu'un ou plusieurs résumés de cette distribution et donc utiliser toute l'information à notre disposition. Par exemple, on peut utiliser les températures horaires mesurées pendant une année t à une station météorologique s afin

d'estimer la fonction de densité des températures annuelles $f_{s,t}$ (ou de façon équivalente la fonction de répartition $F_{s,t}$ ou la fonction quantile $F_{s,t}^{-1}$), et ce pour $t \in T$ et $s \in S$, où T (resp. S) est l'ensemble des années (resp. des stations météorologiques) considérées. La Figure 1 illustre une partie des données sur la période 1953-2021 à Montréal et illustre le fait que le projet reste dans les mêmes veines que le principe standard pour lequel un résumé (moyenne, etc) est remplacé par la densité, fonction de répartition ou fonction quantile des données.

Nous proposons d'utiliser une approche basée sur l'analyse de données fonctionnelles (ADF) (voir par exemple Ramsay and Silverman [2005] et Ferraty and Vieu [2006] pour une présentation détaillée du domaine) afin d'analyser l'évolution des fonctions $f_{s,t}$, $F_{s,t}$ ou $F_{s,t}^{-1}$ dans le temps. Plus précisément, nous envisageons la question comme un problème d'alignement de courbes. Une vaste littérature existe sur ce sujet. Par exemple Marron et al. [2015] propose une revue des principales approches tandis que Ma et al. [2024] et Vantini et al. [2012] s'intéressent au problème d'inférence à partir de fonctions de déformation. De plus, l'analyse de fonctions de densité avec des outils d'ADF a été considérée par exemple dans Petersen and Müller [2016] et Kneip and Utikal [2001] et le problème d'alignement de fonctions de densité a été également entrepris dans Zhang and Müller [2011].

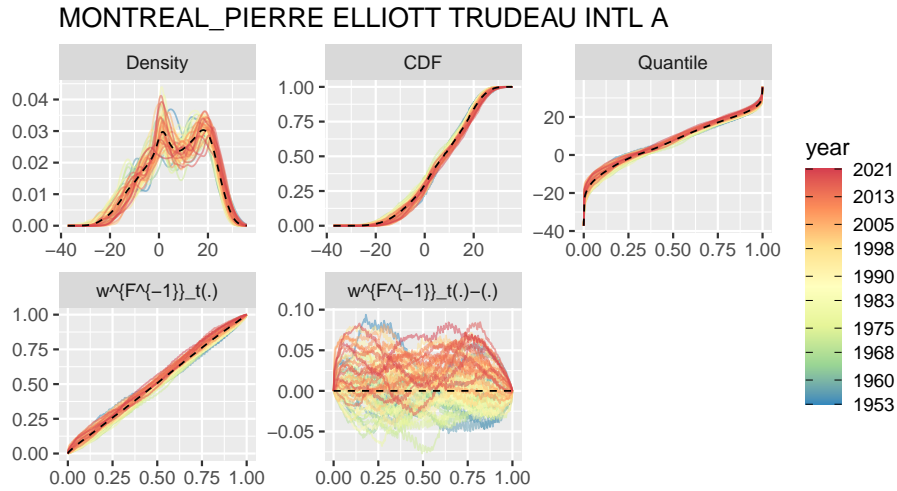


Figure 1: Exemple d'estimations annuelles de densités (utilisant la méthode à noyau), de fonctions de répartition, de fonctions quantiles, de fonctions de déformation (warping) $w_t^{F^{-1}} = F_0 \circ F_t^{-1}$ avec F_0 la cdf (estimée) des températures sur la période 1961-1990, et fonctions $w_t^{F^{-1}}(\cdot) - (\cdot)$. L'estimation de ces fonctions annuelles est basée sur les données horaires collectées sur la période 1953-2021 à Montréal. Pour cet exemple, par souci de simplicité, nous avons considéré le cas $n = 1$ (i.e. toutes les données horaires pour chaque année sont considérées pour estimer f_t, F_t, F_t^{-1}).

La généralisation du principe standard consistant à comparer les températures annuelles moyennes à une température de référence se fait en comparant plutôt des densités annuelles f_t à la densité de référence f_0 des températures de la période de référence (e.g. 1961-1990). Notons que par souci de simplicité, nous considérons pour l'instant qu'une seule station météorologique et ommetons donc l'indice s . Comme une fonction de densité est contrainte à être non négative et d'intégrale 1, cela n'a pas de sens d'un point de vue mathématique de considérer des différences de la forme $f_t - f_0$; ce qui nous intéresse n'est pas leur différence en amplitude mais plutôt la différence de leur répartition de masse des températures. Pour capturer la différence entre f_t et f_0 , nous pouvons donc imaginer comparer la différence de

phase entre les densités f_t et f_0 , ou entre les fonctions de répartition F_t et F_0 , ou encore entre les fonctions quantiles F_t^{-1} et F_0^{-1} ; ici F_0 et F_0^{-1} sont respectivement les fonctions de répartition et quantile des températures de la période de référence.

Une première modélisation (légèrement différente de celle envisagée par [Gallón et al. \[2013\]](#)) pour $\mathcal{F} = F, F^{-1}$ (nous omettons le cas d'une densité pour simplifier) pourrait être

$$\mathcal{F}_{t,i}(\tau) = \mathcal{F}_0 \circ w_{t,i}^{\mathcal{F}}(\tau), \quad i = 1, \dots, n,$$

où τ est une température si $\mathcal{F} = F$ et une probabilité si $\mathcal{F} = F^{-1}$. Dans ce modèle, on suppose que pour toute année t , on dispose de n réalisations $\mathcal{F}_{t,i}$ de variables aléatoires fonctionnelles de moyenne \mathcal{F}_t . La quantité $w_{t,i}^{\mathcal{F}}$ constitue le processus stochastique de déformation (warping function en anglais) permettant de déformer \mathcal{F}_0 en $\mathcal{F}_{t,i}$. Il est naturel de supposer que les processus $w_{t,i}^{\mathcal{F}}$ ont la même moyenne fonctionnelle $\varphi_t^{\mathcal{F}} = \mathbb{E}w_{t,i}^{\mathcal{F}}$. La compréhension de l'évolution dynamique en fonction de t pourrait alors passer par le tracé de l'estimation des fonctions $\varphi_t^{\mathcal{F}}$ ou encore $\varphi_t^{\mathcal{F}} - Id$ pour $t \in T$ (avec Id la fonction identité). Finalement, comprendre à quel point $\varphi_t^{\mathcal{F}} - Id$ s'écarte de 0 permettra (avec peut-être quelques transformations) de comprendre l'évolution du problème considéré (températures annuelles, températures autour de 0°C, temps passés autour de 0°C, etc) et il sera donc naturel de mettre en place des tests du type $H_{0,t} : \varphi_t^{\mathcal{F}} = Id$.¹ Ce plan général soulève déjà de larges questions de recherche méthodologiques et numériques.

- A.** Pour chaque année t , comment échantillonner les données pour obtenir n réalisations $\mathcal{F}_{t,i}$ (à nouveau avec $\mathcal{F} = F, F^{-1}$)? Ces réalisations seront dépendantes, un problème fondamental consistera donc à obtenir des résultats asymptotiques pour l'estimation de $\varphi_t^{\mathcal{F}}$ qui prennent en compte cette dépendance. Le travail de [Dupuy et al. \[2011\]](#) développé dans un cadre indépendant semble une bonne base de travail.
- B.** Le test imaginé est un test fonctionnel. Nous souhaitons mettre en place un test basé sur l'estimation d'enveloppe globale [[Myllymäki et al., 2017](#), [Myllymäki and Mrkvička, 2019](#)]. On considère alors une suite de tests d'hypothèses $H_{0,t}(\tau) : \phi_t^{\mathcal{F}}(\tau) = \tau$, qui est en fait un continuum d'hypothèses nulles [[Blanchard et al., 2014](#)]. Un travail théorique difficile sera de démontrer que la version continue de la FWER ou du FDR (Family-Wise Error Rate et False Discovery Rate, deux mesures d'erreur standard en tests multiples) est bien contrôlée dans ce cadre. Les tests seront probablement basés sur des méthodes de Monte-Carlo et devront nécessiter une implémentation soignée et parallélisée.

Ces deux parties, nous l'espérons, devraient permettre de répondre aux questions de recherche décrites dans la Section 1 au niveau d'une station (ou disons pour des données agrégées spatialement sur une région, province ou état). Il est clair que, en particulier si l'on s'intéresse à l'évolution des températures autour de 0°C sur une longue période, celle-ci est fortement différente dans les régions côtières et dans les régions alpines. Le changement climatique n'est évidemment pas uniforme spatialement (e.g. [Li et al. \[2024b\]](#)). Il sera donc primordial d'étendre l'ensemble des travaux **A**, **B** au cadre spatial, et donc spatio-temporel:

- C.** Dans un premier temps, on peut penser à généraliser les parties **A**, **B** au cas où $\mathcal{F} = F_{s,t}, F_{s,t}^{-1}$ où cette fois-ci $s = (s_1, \dots, s_d)$ un ensemble de d stations, régions de France ou provinces du Canada. Lorsque d est modéré, une extension des résultats semble accessible avec les mêmes modèles que précédemment. Si l'on s'intéresse maintenant à

¹On notera que sous $H_0 = \cap_t H_{0,t}$, une statistique de test pourrait être $\Delta = (\int |\mathcal{F}_t(\tau) - \mathcal{F}_0(\tau)|^p d\tau)^{1/p}$ et on remarquera alors que si $p = 2$ et $\mathcal{F} = F^{-1}$ (resp. si $p = 1$ et $\mathcal{F} = F$) $\Delta = W_2$ (resp. $\Delta = W_1$) où W_p est la distance de Wasserstein d'ordre p entre les deux mesures empiriques, ce qui justifie dans un certain sens le choix de $\mathcal{F} = F, F^{-1}$ pour un modèle de déformation.

caractériser l'ensemble des températures sur un territoire (vues comme un champ spatial continu recueilli de façon horaire), une autre modélisation sera nécessaire. Pour cette étape, puisque les données acquises via Météo-France et Environnement Canada sont collectées sur une grille de stations, un krigeage (interpolation) spatial en toute heure ou mieux spatio-temporellement pour chaque année sera indispensable. L'extension d'une récente technique utilisant le deep learning [Chen et al., 2020] (développée dans le cadre spatial) semble prometteuse.

L'ensemble du projet et notamment la partie **C** va nécessiter des ressources de calculs importantes et devrait soulever d'importantes questions numériques. Une réflexion constante sera menée pour veiller à ce qu'elles puissent être réduites en utilisant des techniques d'apprentissage actif, ou de sous-échantillonnage dépendant [Li et al., 2024a].

3 Interdisciplinarité de l'équipe

Le projet vise à promouvoir et renforcer une collaboration franco-canadienne pluri-disciplinaire entre JF Coeurjolly, MH Descary et JM Thériault. JF Coeurjolly et MH Descary ont déjà collaboré dans le cadre de l'encadrement d'un stagiaire post-doctoral (2018-2020) à l'UQAM (lorsque JF Coeurjolly était en poste à l'UQAM 2016-2020). La thématique portait sur l'analyse du mouvement oculaire par déconvolution de l'intensité d'un processus de points. Les échanges scientifiques ont perduré après le recrutement de JF Coeurjolly à l'Université Grenoble Alpes (2020) et se sont notamment réorientés sur des problèmes liés aux sciences du climat, les trois membres ayant commencé une discussion informelle à l'automne 2022. À la suite de cela, MH Descary a effectué un séjour de recherche de 3 mois (mai à juillet 2023) en tant que chercheure invitée par le CNRS (en lien avec l'UMI CRM de Montréal). L'idée était notamment de travailler sur une partie des données illustrées par la Figure 1. Ce séjour de recherche a permis de pouvoir soulever les points théoriques sous-tendant ce projet.

Le projet tire clairement partie **des spécificités scientifiques et de l'interdisciplinarité** des trois membres: JF Coeurjolly est spécialisé en statistique spatiale et visualisation de données spatiales et spatio-temporelles; MH Descary est spécialisée en apprentissage statistique et analyse de données fonctionnelles; JM Thériault est spécialisée en sciences du climat et notamment dans la compréhension d'évènements météorologiques extrêmes hivernaux. Le projet s'appuiera également en local (IGE, UGA, France) sur les compétences de Juliette Blanchet très à l'interface entre statistique et compréhension des phénomènes extrêmes.

4 Budget, cadre éthique et environnemental

Demande principale. L'équipe souhaite **pour des questions d'équité et de diversité en priorité recruter une étudiante** dans le domaine des statistiques, probabilités, apprentissage statistique avec des prédispositions évidentes pour le travail dans un cadre pluri-disciplinaire. La thèse pourrait se dérouler selon le calendrier suivant: [Année 1] Formation en ADF, statistique spatiale, sciences du climat; collecte de données; Parties **A,B**; [Année 2] Parties **B,C**; [Année 3] Partie **C**.

Cadre éthique. Les membres s'engagent à promouvoir les résultats sous forme d'articles déposés sur hal/arxiv, à soumettre ces travaux dans des journaux respectant leurs auteurs et une charte environnementale. Ils s'engagent également à promouvoir les résultats dans les deux communautés statistique et sciences du climat. Les méthodologies développées seront rendues disponibles à la communauté via la construction de paquets (R, python ou Julia).

Par ailleurs, le LJK (Laboratoire Jean Kuntzmann) s'est impliqué dans une démarche environnementale concernant la gestion du matériel informatique (partage des ressources et non renouvellement de machines avant 5/7 ans) et celle des missions (préférence du train pour des trajets inférieurs à 8h). JF Coeurjolly s'est engagé davantage en signant le manifeste limitant le nombre de kms en avion à 20,000 kms sur une période de deux ans [Dupaigne et al., 2023]. Ces aspects feront donc naturellement partie des questions soulevées lors du recrutement de l'étudiante en doctorat.

Engagement côté UQAM. Un séjour long de recherche de 8 à 10 mois est prévu sur la période (préférentiellement en milieu/fin de deuxième année de thèse). MH Descary et JM Thériault s'engagent à financer ce séjour. Les coûts d'un tel séjour (logement, transport, frais divers) sont estimés entre 15,000 et 20,000\$.

References

- S. Biswas, L. Hashemian, and A. Bayat. Investigation of pothole severity and maintenance methods in canada through questionnaire survey. *Journal of Cold Regions Engineering*, 32(2):04018002, 2018.
- G. Blanchard, S. Delattre, and E. Roquain. Testing over a continuum of null hypotheses with false discovery rate control. *Bernoulli*, 20(1):304–333, 2014.
- N. J. Casson, A. R. Contosta, E. A. Burakowski, J. L. Campbell, M. S. Crandall, I. F. Creed, M. C. Eimers, S. Garlick, D. A. Lutz, M. Q. Morison, A. T. Morzillo, and S. J. Nelson. Winter weather whiplash: Impacts of meteorological events misaligned with natural and human systems in seasonally snow-covered regions. *Earth's Future*, 7(12):1434–1450, 2019.
- W. Chen, Y. Li, B. J. Reich, and Y. Sun. Deepkriging: Spatially dependent deep neural networks for spatial prediction. *arXiv:2007.11972*, 2020.
- C. M. DeBeer, H. S. Wheeler, J. W. Pomeroy, A. G. Barr, J. L. Baltzer, J. F. Johnstone, M. R. Turetsky, R. E. Stewart, M. Hayashi, G. van der Kamp, S. Marshall, E. Campbell, P. Marsh, S. K. Carey, W. L. Quinton, Y. Li, S. Razavi, A. Berg, J. J. McDonnell, C. Spence, W. D. Helgason, A. M. Ireson, T. A. Black, M. Elshamy, F. Yassin, B. Davison, A. Howard, J. M. Thériault, K. Shook, M. N. Demuth, and A. Pietroniro. Summary and synthesis of changing cold regions network (ccrn) research in the interior of western canada – part 2: Future change in cryosphere, vegetation, and hydrology. *Hydrology and Earth System Sciences*, 25(4):1849–1882, 2021.
- L. Dupaigne, A.-L. Fougères, I. Gentil, O. Graf, A. Leclercq Samson, and V. Hugo. Limitation de l'avion dans les laboratoires de mathématiques : horizon 2030, 2023. URL <https://tinyurl.com/4snjct8>.
- J.-F. Dupuy, J.-M. Loubes, and E. Maza. Non parametric estimation of the structural expectation of a stochastic increasing function. *Statistics and Computing*, 21:121–136, 2011.
- F. Ferraty and P. Vieu. *Nonparametric functional data analysis*. Springer New York, 2006.
- S. Gallón, J.-M. Loubes, and E. Maza. Statistical properties of the quantile normalization method for density curve alignment. *Mathematical biosciences*, 242(2):129–142, 2013.
- P. D. Jones, T. M. Wigley, and P. B. Wright. Global temperature variations between 1861 and 1984. *Nature*, 322(6078):430–434, 1986.
- A. Kneip and K. J. Utikal. Inference for density families using functional principal component analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 96(454):519–542, 2001.
- H. Lee, K. Calvin, D. Dasgupta, G. Krinner, A. Mukherji, P. Thorne, C. Trisos, J. Romero, P. Aldunce, K. Barrett, et al. *Climate change 2023: synthesis report. Contribution of working groups I, II and III to the sixth assessment report of the intergovernmental panel on climate change*. 2023.

- X. Li, Y. Gao, H. Chang, D. Huang, Y. Ma, R. Pan, H. Qi, F. Wang, S. Wu, K. Xu, J. Zhou, X. Zhu, Y. Zhu, and H. Wang. A selective review on statistical methods for massive data computation: Distributed computing, subsampling, and minibatch techniques. *arXiv:2403.11163*, 2024a.
- Z. Li, Q. Li, and T. Chen. Record-breaking high-temperature outlook for 2023: An assessment based on the china global merged temperature (cmst) dataset. *Advances in Atmospheric Sciences*, 41(2): 369–376, 2024b.
- Y. Ma, X. Zhou, and W. Wu. A stochastic process representation for time warping functions. *Computational Statistics & Data Analysis*, page 107941, 2024.
- K. Makoto, T. Kajimoto, L. Koyama, G. Kudo, H. Shibata, Y. Yanai, and J. H. C. Cornelissen. Winter climate change in plant–soil systems: summary of recent findings and future perspectives. *Ecological Research*, 29(4):593–606, 2014.
- J. S. Marron, J. O. Ramsay, L. M. Sangalli, and A. Srivastava. Functional data analysis of amplitude and phase variation. *Statistical Science*, pages 468–484, 2015.
- E. Mekis, R. E. Stewart, J. M. Theriault, B. Kochtubajda, B. R. Bonsal, and Z. Liu. Near-0°C surface temperature and precipitation type patterns across canada. *Hydrology and Earth System Sciences*, 24(4):1741–1761, 2020.
- M. Myllymäki and T. Mrkvička. Get: Global envelopes in r. *arXiv:1911.06583*, 2019.
- M. Myllymäki, T. Mrkvička, P. Grabarnik, H. Seijo, and U. Hahn. Global envelope tests for spatial processes. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 79(2):381–404, 2017.
- I. B. Nilsen, I. Hanssen-Bauer, O. E. Tveito, and W. K. Wong. Projected changes in days with zero-crossings for norway. *International Journal of Climatology*, 41(4):2173–2188, 2021.
- A. Petersen and H.-G. Müller. Functional data analysis for density functions by transformation to a hilbert space. *The Annals of Statistics*, pages 183–218, 2016.
- J. Ramsay and B. Silverman. *Functional Data Analysis*. Springer, New York, 2005.
- L. Scaff, S. Krogh, K. Musselman, A. Harpold, M. Lillo-Saavedra, R. Oyarzún, Y. Li, and R. Rasmussen. Winter warm spells and snowpack ablation in western north america. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, pages EGU–6903, 2023.
- R. E. Stewart. Precipitation types in winter storms. *pure and applied geophysics*, 123:597–609, 1985.
- R. E. Stewart, K. K. Szeto, B. R. Bonsal, J. M. Hanesiak, B. Kochtubajda, Y. Li, J. M. Thériault, C. M. DeBeer, B. Y. Tam, Z. Li, Z. Liu, J. A. Bruneau, P. Duplessis, S. Marinier, and D. Matte. Summary and synthesis of changing cold regions network (ccrn) research in the interior of western canada – part 1: Projected climate and meteorology. *Hydrology and Earth System Sciences*, 23(8): 3437–3455, 2019.
- R. E. Stewart, Z. Liu, J. M. Thériault, and C. J. Ruman. The occurrence of near-0°C surface air temperatures in the current and pseudo-global warming future over southern canada. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 128(6), 2023.
- S. Vantini et al. A topological definition of phase and amplitude variability of functional data. In *46th scientific meeting of the Italian statistical society*. Citeseer, 2012.
- S. Xie, J. Qu, X. Xu, and Y. Pang. Interactions between freeze–thaw actions, wind erosion desertification, and permafrost in the qinghai–tibet plateau. *Natural Hazards*, 85:829–850, 2017.
- Y. K. Yukari Takeuchi and N. Ishikawa. The thermal effect of melting snow/ice surface on lower atmospheric temperature. *Arctic, Antarctic, and Alpine Research*, 34(1):20–25, 2002. doi: 10.1080/15230430.2002.12003464.
- Z. Zhang and H.-G. Müller. Functional density synchronization. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(7):2234–2249, 2011.